

# DAS KÜHLUNGSPROBLEM BEI LAMINAREN GRENZSCHICHTEN REALER GASE

GÜNTER ROMBERG

DFVLR-Institut für Theoretische Gasdynamik, D-51 Aachen, Theaterstr. 13, Deutschland

(Received 11 January 1971)

**Zusammenfassung**—Untersucht wird die laminare Grenzschicht an einer mit geringer Unterschallgeschwindigkeit längsangeströmten Platte bei vorgegebener Wandtemperatur. Das Medium ist ein Gemisch thermisch vollkommener Gase. An irreversiblen inneren Veränderungen treten Schwingungsrelaxationen auf. Zwei Mechanismen der Energieübertragung werden untersucht: Parallel- und Reihenerregung. Wenn die Grenzschichtströmung nur wenig von der Gleichgewichts- oder der eingefrorenen Strömung abweicht und die Differenz zwischen der Wandtemperatur und der Anströmtemperatur hinreichend klein ist, ergeben sich Ähnlichkeitslösungen für die Grenzschicht. Das thermodynamische Nichtgleichgewicht kann den örtlichen Wärmeübergang in einem bestimmten Eckertzahlbereich wesentlich beeinflussen. Starke Beeinflussung des örtlichen Wärmeübergangs durch thermodynamisches Nichtgleichgewicht kann besonders bei polyatomaren Kühlmitteln auftreten.

BEZEICHNUNGEN		$F(\eta)$ ,	Funktion in der Blasiuslösung, Gleichung (3.1);
$A$ ,	Integrationskonstante;	$g_\alpha$ ,	Massenkonzentration der Komponente $\alpha$ ;
$b_v, b_{Rv}$	Konstanten, Gleichung (5.3);	$G(\delta)$ ,	Verzerrungsfunktion, Gleichung (5.2);
$c_v$ ,	Auf die Masseneinheit des Mediums bezogene spezifische Wärme der $v$ -ten relaxierenden Molekülschwingungsart;	$J_u$ ,	Energiestromdichte, Gleichung (2.1);
$c_{pf}$ ,	gefrorene spezifische Wärme der Masseneinheit des Mediums bei konstantem Druck;	$K_{fv}$ ,	Kennzahl, Gleichung (2.24);
$c_p$ ,	spezifische Wärme der Masseneinheit des Mediums bei konstantem Druck in Gleichgewichtsströmung;	$K_{ev}$ ,	Kennzahl, Gleichung (4.9);
$C_f$ ,	Kennzahl, Gleichung (5.13);	$l$ ,	charakteristische Bezugslänge;
$C_e$ ,	Kennzahl, Gleichung (4.16);	$m$ ,	Anzahl der relaxierenden Molekülschwingungsarten;
$d_v$ ,	Konstante, Gleichungen (4.2), (4.7) und (4.8);	$M_f$ ,	gefrorene Machzahl;
$D_v, D_{Rv}$ ,	Damköhlerzahlen, Gleichung (2.23);	$Nu_x$ ,	örtliche Nusseltzahl, Gleichung (4.22);
$Ec_f$ ,	Eckertzahl mit $c_{pf}$ gebildet, Gleichung (2.22);	$Nu_{xe}$ ,	örtliche Nusseltzahl bei Gleichgewichtsströmung;
$Ec_e$ ,	Eckertzahl mit $c_p$ gebildet;	$Nu_{xf}$ ,	örtliche Nusseltzahl bei eingefrorener Strömung;
$Ec_e^*, Ec_f^*$ ,	kritische Eckertzahlen, Gleichungen (4.26) bzw. (5.41);	$p$ ,	Druck;
$f(Z)$ ,	Funktion von $Z$ , Gleichung (5.22);	$p', \dagger$ ,	dimensionsloser Druck, Gleichung (2.11);

† Die Striche bei den in Gleichung (2.11) eingeführten dimensionslosen Größen werden im Anschluss an Gleichung (2.11) der Einfachheit halber wieder fortgelassen.

$Pr_f$ ,	Prandtlzahl mit $c_{pf}$ gebildet, Gleichung (2.22);	$\vartheta_v$ ,	$(T_v - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$ ;
$Pr_e$ ,	Prandtlzahl mit $c_p$ gebildet;	$\vartheta_\infty$ ,	$\vartheta$ bei Gleichgewichtsströmung;
$R$ ,	universelle Gaskonstante;	$\vartheta_f$ ,	$\vartheta$ bei eingefrorener Strömung;
$Re, \overline{Re}$ ,	Reynoldssche Zahlen, Gleichung (2.21);	$\vartheta_{e1}, \vartheta_{e2}$ ,	abkürzende Bezeichnungen, Gleichungen (4.4) und (4.5);
$t$ ,	Zeit;	$\vartheta^{(1)}(x, y)$ ,	Entwicklungskoeffizient, Gleichung (4.1);
$T$ ,	Temperatur der aktiven Freiheitsgrade;	$\overline{\vartheta}(x, y)$ ,	Entwicklungskoeffizient, Gleichung (5.4);
$T_e$ ,	Temperatur der aktiven Freiheitsgrade bei Gleichgewichtsströmung;	$\theta(\eta)$ ,	Funktion von $\eta$ , Gleichung (4.13);
$T_v$ ,	Schwingungstemperatur der $v$ -ten relaxierenden Molekülschwingungsart;	$\overline{\theta}(\eta)$ ,	Funktion von $\eta$ , Gleichung (5.11);
$T_w$ ,	charakteristische Wandtemperatur in 2, Wandtemperatur in 3 bis 5;	$\theta_{1v}$ ,	charakteristische Schwingungstemperatur der $v$ -ten Molekülschwingungsart (Tabelle 2);
$u, v$ ,	$x$ - bzw. $y$ -Komponente der Strömungsgeschwindigkeit;	$\theta_v(\eta)$ ,	Funktion von $\eta$ , Gleichung (5.15);
$u', v', \dagger$	dimensionslose $x$ - bzw. $y$ -Komponente der Strömungsgeschwindigkeit, Gleichung (2.11);	$\kappa$ ,	Wärmeleitfähigkeit, Gleichung (2.1);
$v$ ,	Strömungsgeschwindigkeit;	$\mu, \bar{\mu}$ ,	Reibungskoeffizienten, Gleichung (2.5);
$W$ ,	Molekulargewicht des Gasgemisches;	$\mu_B$ ,	Volumenviskosität, Gleichung (2.5);
$W_\alpha$ ,	Molekulargewicht der Komponente $\alpha$ ;	$\xi, \bar{\xi}$ ,	Integrationsvariablen;
$x, y$ ,	kartesische Koordinaten;	$\rho$ ,	Dichte;
$x', y', \dagger$	dimensionslose kartesische Koordinaten, Gleichung (2.11);	$\rho', \dagger$	dimensionslose Dichte, Gleichung (2.11);
$Y$ ,	innere Variable, Gleichung (5.2);	$\Sigma$ ,	abkürzende Bezeichnung, Gleichung (5.33);
$Z$ ,	verzerrte Ähnlichkeitsvariable, Gleichung (5.22);	$\tau_{pv}, \tau_{Rv}$ ,	Relaxationszeiten, Gleichungen (2.9) und (2.10);
$\gamma_f$ ,	Verhältnis der gefrorenen spezifischen Wärmen;	$\phi_1, \phi_2$ ,	abkürzende Bezeichnungen, Gleichung (2.16).
$\delta, \Delta$ ,	Störparameter, Gleichung (5.4) bzw. (4.1);	Indizes	
$\eta$ ,	Ähnlichkeitsvariable, Gleichung (3.2);	$\infty$ ,	geeigneter Bezugszustand in 2, Anströmung in 3 bis 5.
$\vartheta$ ,	$(T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$ ;		

† Die Striche bei den in Gleichung (2.11) eingeführten dimensionslosen Größen werden im Anschluss an Gleichung (2.11) der Einfachheit halber wieder fortgelassen.

## 1. EINLEITUNG

GEGENSTAND der Untersuchung bildet die laminare Temperaturgrenzschicht an einer mit kleiner Unterschallgeschwindigkeit längs angeströmten ebenen Platte bei vorgegebener Wandtemperatur. In der Grenzschicht sollen so hohe Temperaturen und so geringe Dichten vorkommen, dass Abweichungen vom ungehemmten thermodynamischen Gleichgewicht eine Rolle

spielen. Die zu behandelnde Plattengrenzschicht kann bei der Berechnung von Kühlrohrreinlaufströmungen Verwendung finden.

Eine physikalische Situation, charakterisiert als laminare Strömung bei geringen Unterschallgeschwindigkeiten, geringen Dichten, aber hohen Temperaturen, so dass Abweichungen vom ungehemmten thermodynamischen Gleichgewicht eine Rolle spielen, kann erwartet werden in Kühlrohren eines Staustrahltriebwerksreaktors beim Hyperschallflug in grossen Höhen (siehe [3], 1.3). Abbildung 1 zeigt einen

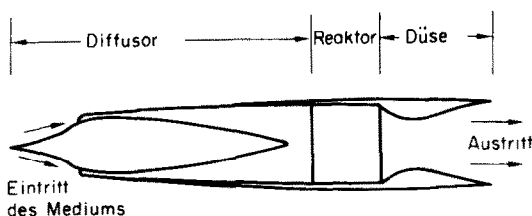


ABB. 1. Längsschnitt durch ein Staustrahltriebwerk mit Atomreaktor statt Brennkammer (schematisch).

Längsschnitt durch ein Staustrahltriebwerk, bei dem ein Atomreaktor an die Stelle der Brennkammer tritt. Das eintretende Medium wird durch ein Stoss-System verdichtet und auf Unterschallgeschwindigkeit gebracht, strömt dann durch einen Unterschalldiffusor in das Kühlrohrsystem des Reaktors und anschliessend in die Triebwerksschubdüse.

## 2. GRUNDGLEICHUNGEN UND GRENZSCHICHTNÄHERUNG

Die nachfolgende Grenzschichtuntersuchung geht von folgenden Annahmen aus:

(1) Das Medium ist ein Gemisch thermisch vollkommener Gase. Zwischen Rotation und Translation herrscht thermisches Gleichgewicht. Elektronenanregung kann vernachlässigt werden. An irreversiblen inneren Veränderungen treten nur Energieausgleichsprozesse auf, und zwar zwischen Molekülschwingungsarten

(vibrational modes) unter sich sowie zwischen Molekülschwingungsarten und den aktiven Freiheitsgraden (d. h. das thermodynamische System bestehend aus Translation, Rotation und allen Molekülschwingungsarten, welche mit der Translation im thermischen Gleichgewicht sind).

(2) Keine äusseren Kräfte, keine elektromagnetischen Erscheinungen, keine chemischen Reaktionen.

(3) Für die Stoffbeiwerte (Transportkoeffizienten, spezifische Wärmen, Relaxationszeiten) können konstante Werte benutzt werden.

Die Strömung ist.

(4) laminar,

(5) stationär und zweidimensional.

(6) Massendiffusion der chemischen Bestandteile des Gasgemisches ist vernachlässigbar.

(7) Die phänomenologische Beziehung für die Energiestromdichte  $J_u$ , mittels derer man den Fluss nichtmechanischer Energie durch die Oberfläche des strömenden Massenteilchens beschreibt, kann in der Form

$$J_u = -\kappa \text{ grad } T \quad (2.1)$$

geschrieben werden.  $\kappa$  bedeutet eine positive Konstante und  $T$  die Temperatur der aktiven Freiheitsgrade (wegen phänomenologischer Beziehungen bei Nichtgleichgewichtsströmungen siehe [3], 2.4). Annahme (7) impliziert, dass für die betrachtete Grenzschichtströmung Kopplung zwischen dem Transport nichtmechanischer Energie und der Schwingungsrelaxation vernachlässigbar ist. Annahme (3) erscheint gerechtfertigt, wenn die Strömungsgeschwindigkeit und die Differenz zwischen der Wandtemperatur und der Temperatur der Aussenströmung hinreichend klein bleiben. Wegen (2) scheidet natürliche Konvektion aus.

$x$  und  $y$  bedeuten kartesische Koordinaten,  $v$  steht für die Strömungsgeschwindigkeit mit den Komponenten  $u$  und  $v$  in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung.  $p$  ist der Druck und  $\rho$  die Dichte. Unter den aufgeführten Annahmen gelten folgende Grundgleichungen: Kontinuitätssatz:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0. \quad (2.2)$$

Impulssätze für die  $x$ - und  $y$ -Richtung:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} v, \quad (2.3)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} v, \quad (2.4)$$

wobei abkürzend

$$\frac{1}{3}\mu + \mu_B = \bar{\mu} \quad (2.5)$$

gesetzt ist.  $\mu$  steht für den Reibungskoeffizienten und  $\mu_B$  für die Volumenviskosität.

Energiesatz:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left\{ c_{pf} T + \sum_{v=1}^m c_v T_v \right\} = \kappa \Delta T + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \phi \quad (2.6)$$

mit der Dissipation

$$\phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + (\bar{\mu} - \mu) \operatorname{div}^2 v. \quad (2.7)$$

$c_{pf}$  bezeichnet die gefrorene spezifische Wärme der Masseneinheit des Mediums bei konstantem Druck.  $c_v$  und  $T_v$  bedeuten die auf die Masseneinheit des Mediums bezogene spezifische Wärme bzw. die Temperatur der  $v$ -ten relaxierenden Molekülschwingungsart (vibrational mode). Die Anzahl der relaxierenden Molekülschwingungsarten betrage  $m$ . Unter gefrorener spezifischer Wärme hat man die spezifische Wärme der aktiven Freiheitsgrade zu verstehen.

Thermische Zustandsgleichung ( $R$  = universelle Gaskonstante).

$$p = \rho T \frac{R}{W}, \quad \frac{1}{W} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{g_\alpha}{W_\alpha}. \quad (2.8)$$

Das Gasgemisch baut sich auf aus  $n$  Kom-

ponenten  $\alpha$  mit den Massenkonzentrationen  $g_\alpha$  und den Molekulargewichten  $W_\alpha$ .

Die Beziehungen (2.2) bis (2.8) liefern bei festem  $g_\alpha$ ,  $W_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ )  $m$  und  $n$  fünf Gleichungen für die Variablen  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $T_v$  ( $v = 1, \dots, m$ ) als Funktionen der unabhängigen Variablen  $x$ ,  $y$  und der Parameter  $\mu$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\kappa$ ,  $c_{pf}$ ,  $c_v$  ( $v = 1, \dots, m$ ).

Die noch fehlenden Beziehungen bilden die Relaxationsgleichungen.

Wir behandeln nebeneinander die Fälle der Paralleleregung mit beliebig vielen relaxierenden Molekülschwingungsarten und der Reihenerregung (bei einem chemisch einheitlichen Gas) mit zwei relaxierenden Molekülschwingungsarten. Bei Paralleleregung können die relaxierenden Molekülschwingungsarten nicht unter sich, sondern nur mit den aktiven Freiheitsgraden Energie tauschen. Im Falle der Reihenerregung kann eine der relaxierenden Molekülschwingungsarten nur mit den aktiven Freiheitsgraden und der zweiten relaxierenden Molekülschwingungsart direkt Energie tauschen. Die zweite relaxierende Molekülschwingungsart kann nur mit der ersten Energie tauschen, und zwar durch einen rein internen Molekülprozess.

Wir setzen folgendermassen an ([1], H, 8 u. H, 9):

Paralleleregung:

$$\frac{DT_v}{Dt} = \frac{T - T_v}{\tau_{pv}} \quad (v = 1, \dots, m). \quad (2.9)$$

Reihenerregung:

$$\begin{aligned} \frac{DT_1}{Dt} &= \frac{T - T_1}{\tau_{R1}} + \frac{T_2 - T_1}{\tau_{R2}}, \\ \frac{DT_2}{Dt} &= \frac{T_1 - T_2}{\tau_{R1}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Der Operator  $D/Dt$  bedeutet substantielle Differentiation,  $\tau_{pv}$  ( $v = 1, \dots, m$ ),  $\tau_{R1}$ ,  $\tau_{R2}$  bezeichnen (konstante) Relaxationszeiten. Bei Reihenerregung bezieht sich der Index 1 auf diejenige Molekülschwingungsart, welche direkt

Energie mit den aktiven Freiheitsgraden tauschen kann.

Die Beziehungen (2.2) bis (2.10) liefern für Parallel- und Reihenerregung ein vollständiges Gleichungssystem für  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ , die  $T_v$ ,  $u$  und  $v$  als Funktionen von  $x$ ,  $y$  und der Parameter  $\mu$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\kappa$ ,  $c_{pf}$ ,  $c_v$  ( $v = 1, \dots, m$ ) und  $\tau_{pv}$  ( $v = 1, \dots, m$ ) bzw.  $\tau_{Rv}$  ( $v = 1, 2$ ).

Übergang auf dimensionslose Größen:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{u}{|v_\infty|}, \quad v' = \frac{v}{|v_\infty|}, \quad p' = \frac{p}{\rho_\infty}, \\ p' &= \frac{p}{\rho_\infty v_\infty^2}, \quad \vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \vartheta_v = \frac{T_v - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \\ x' &= \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Der Index  $\infty$  bezieht sich auf einen geeigneten Bezugszustand.  $T_w$  ist eine Wandtemperatur,  $l$  eine charakteristische Länge. Das gewonnene vollständige Gleichungssystem geht durch die Transformation (2.11) nach einiger Rechnung über in die folgende Form, wenn die Striche der Einfachheit halber wieder fortgelassen werden:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) &+ \rho \sum_{v=1}^m K_{fv} \left( u \frac{\partial \vartheta_v}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta_v}{\partial y} \right) \\ &= Ec_f \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re Pr_f} \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right) \\ &+ \frac{Ec_f}{Re} \phi_1 + Ec_f \left( \frac{1}{Re} - \frac{1}{Re} \right) \phi_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 2 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \\ \phi_2 &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma_f - 1}{\gamma_f Ec_f} \vartheta + \frac{1}{\gamma_f M_{f\infty}^2}. \quad (2.17)$$

Paralleleregung:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \vartheta_v}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta_v}{\partial y} &= D_v (\vartheta - \vartheta_v) \\ (v = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Reihenerregung:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} &= D_{R1} (\vartheta - \vartheta_1) \\ &+ D_{R2} (\vartheta_2 - \vartheta_1), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$u \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} = D_{R2} (\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (2.20)$$

In Gleichungen (2.13) bis (2.20) treten folgende dimensionslose Kennzahlen auf:

Das Verhältnis der gefrorenen spezifischen Wärmen  $\gamma_f$ , die mit der gefrorenen Schallgeschwindigkeit gebildete Machzahl  $M_{f\infty}$ , die Reynoldszahlen

$$Re = \frac{|v_\infty| \rho_\infty l}{\mu}, \quad \overline{Re} = \frac{|v_\infty| \rho_\infty l}{\bar{\mu}}, \quad (2.21)$$

die mit  $c_{pf}$  gebildete Prandtzahl und Eckertzahl

$$Pr_f = \frac{c_{pf} \mu}{\kappa}, \quad Ec_f = \frac{v_\infty^2}{c_{pf} (T_w - T_\infty)}, \quad (2.22)$$

die Damköhlerzahlen

$$\begin{aligned} D_v &= \frac{l}{|v_\infty| \tau_{pv}} \quad (v = 1, \dots, m) \quad \text{bzw.} \\ D_{Rv} &= \frac{l}{|v_\infty| \tau_{Rv}} \quad (v = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

und die Kennzahlen

$$K_{fv} = \frac{c_v}{c_{pf}} \quad (v = 1, \dots, m). \quad (2.24)$$

Bei der Abschätzung der Grössenordnung der einzelnen Glieder in den Bilanzgleichungen (2.12) bis (2.15) kann man ähnlich vorgehen wie im klassischen Falle  $K_{fv} = 0$  ( $v = 1, \dots, m$ ). Unter der Zusatzvoraussetzung

$$\left. \begin{aligned} Re \gg 1, \quad \frac{Ec_f}{Re} \ll 1, \quad Pr_f Re \gg 1, \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

$Re/\overline{Re}$  von der Grössenordnung eins }  
ergeben sich die Grenzschichtgleichungen:

$$\frac{\partial(u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} = 0, \quad (2.26)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \rho \sum_{v=1}^m K_{fv} \left( u \frac{\partial \vartheta_v}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta_v}{\partial y} \right) \\ = \frac{1}{Pr_f Re} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + Ec_f u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Ec_f}{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Der Impulssatz für die  $y$ -Richtung enthält nur Glieder höherer Ordnung und scheidet aus. Die Relaxationsgleichungen hingegen bleiben ungeändert.

### 3. PLATTENGRENZSCHICHT

Wir beschränken uns im folgenden auf die Grenzschicht an einer längsangeströmten ebenen Platte der Länge  $l$  bei vorgeschriebener Wandtemperatur  $T_w$ . Der Index  $\infty$  bezieht sich von nun an auf die homogene Anströmung, welche sich im ungehemmten thermodynamischen Gleichgewicht befinden soll. Die positive  $x$ -Richtung fällt mit der Anströmrichtung zusammen, und der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems liegt in der Plattenvorderkante. Wir nehmen die Anströmgeschwindigkeit und die Temperaturdifferenz  $T_w - T_\infty$  hinreichend klein an, so dass in den Grenzschichtgleichungen (2.26) bis (2.28)  $\rho = 1$  gesetzt werden darf. Die Grenzschichtgleichungen (2.26) bis (2.28) mit  $\rho = 1$  und  $\partial p / \partial x = 0$  bilden zusammen mit den Relaxationsgleichungen (2.18) bzw. (2.19), (2.20) ein vollständiges Gleichungssystem

für  $u, v, \vartheta$  und  $\vartheta_v$  ( $v = 1, \dots, m$ ) als Funktionen von  $x, y$  und der Parameter  $Re, Pr_f, Ec_f, K_{fv}$  ( $v = 1, \dots, m$ ) und  $D_v$  ( $v = 1, \dots, m$ ) bzw.  $D_{Rv}$  ( $v = 1, 2$ ).

Bei der betrachteten Grenzschichtströmung hängt das Geschwindigkeitsfeld von den Temperaturfeldern gar nicht ab. Das Geschwindigkeitsfeld wird einfach durch die Blasiuslösung dargestellt (der Strich bedeutet Differentiation nach  $\eta$ ):

$$u = F', \quad v = \frac{1}{2\sqrt{(xRe)}} (\eta F' - F) \quad (3.1)$$

mit der Ähnlichkeitsvariablen

$$\eta = y \sqrt{\left( \frac{Re}{x} \right)}. \quad (3.2)$$

Die Funktion  $F(\eta)$  löst die Differentialgleichung

$$FF'' + 2F''' = 0 \quad (3.3)$$

und erfüllt die Randbedingungen

$$\begin{aligned} F = F' = 0 \text{ für } \eta = 0, \\ F' = 1 \text{ für } \eta = \infty. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Durch die Substitution (3.1) werden der Energiesatz und die Relaxationsgleichungen in lineare partielle Differentialgleichungen für  $\vartheta$  und  $\vartheta_v$  ( $v = 1, \dots, m$ ) umgewandelt:

$$\begin{aligned} F' \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \sum_{v=1}^m K_{fv} \\ \times \left( F' \frac{\partial \vartheta_v}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta_v}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr_f Re} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \\ + \frac{Ec_f}{Re} \left( \frac{\partial F'}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Parallelerregung:

$$\begin{aligned} F' \frac{\partial \vartheta_v}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta_v}{\partial y} \\ = D_v (\vartheta - \vartheta_v) \quad (v = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Reihenerregung:

$$F' \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} = D_{R1}(\vartheta - \vartheta_1) + D_{R2}(\vartheta_2 - \vartheta_1), \quad (3.7)$$

$$F' \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} = D_{R2}(\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (3.8)$$

Es liegt nahe, folgende Fälle durch analytische Störungsrechnungen zu behandeln:

(a) Geringe Abweichungen vom ungehemmten thermodynamischen Gleichgewicht in der Strömung

(b) Geringe Abweichungen vom (vollkommen) gehemmten thermodynamischen Gleichgewicht in der Strömung.

Im Grenzfall der Gleichgewichtsströmung ( $T = T_v$ ,  $v = 1, \dots, m$ ) verlaufen die Relaxationsprozesse unendlich rasch ab, so dass die Temperaturen aller Molekülschwingungsarten mit der Temperatur der aktiven Freiheitsgrade übereinstimmen. Im Grenzfall der eingefrorenen Strömung sind die Relaxationsprozesse vollkommen gehemmt. Die Temperaturen der relaxierenden Molekülschwingungsarten sind dann konstant.

#### 4. GERINGE ABWEICHUNGEN VON DER GLEICHGEWICHTSSTRÖMUNG

*Zurückführung der Temperaturberechnungen auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen*

Bei Parallelerregung wird folgendermassen angesetzt:

$$\vartheta = \vartheta_e + \Delta \vartheta^{(1)}(x_1, y) + o[\Delta] \text{ für } x, y = \text{const}, \quad \Delta \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

$$\vartheta - \vartheta_v = \Delta d_v \left\{ F' \frac{\partial \vartheta_e}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta_e}{\partial y} \right\} + o[\Delta] \text{ für } x, y = \text{const}, \Delta \rightarrow 0, \quad (v = 1, \dots, m). \quad (4.2)$$

Der Index  $e$  bezieht sich auf die Gleichgewichtsströmung ( $D_v = \infty$ ,  $v = 1, \dots, m$ ).  $\vartheta_e$  findet sich in der Literatur (siehe etwa [4], S. 270):

$$\vartheta_e = \left[ 1 - \frac{Ec_e}{2} \vartheta_{e2}(0, Pr_e) \right] \vartheta_{e1}(\eta, Pr_e) + \frac{Ec_e}{2} \vartheta_{e2}(\eta, Pr_e), \quad (4.3)$$

wobei

$$\vartheta_{e1}(\eta, Pr_e) = \int_{\xi=\eta}^{\infty} [F''(\xi)]^{Pr_e} d\xi / \int_0^{\infty} [F''(\xi)]^{Pr_e} d\xi \quad (4.4)$$

und

$$\vartheta_{e2}(\eta, Pr_e) = 2Pr_e \int_{\xi=\eta}^{\infty} [F''(\xi)]^{Pr_e} \left\{ \int_0^{\xi} [F''(\bar{\xi})]^{2-Pr_e} d\bar{\xi} \right\} d\xi \quad (4.5)$$

$\xi$  und  $\bar{\xi}$  sind Integrationsvariable.  $Pr_e$  und  $Ec_e$  stehen für die Prandtlzahl bzw. Eckertzahl, gebildet mit

$$c_p = c_{pf} + \sum_{v=1}^m c_v, \quad (4.6)$$

der spezifischen Wärme bei konstantem Druck der Gleichgewichtsströmung. Zwischen dem Störparameter  $\Delta$  mit  $1 \gg \Delta > 0$  und den Damköhlerzahlen  $D_v$  besteht der Zusammenhang

$$D_v^{-1} = \Delta d_v. \quad (4.7)$$

Die  $d_v$  hat man als Konstanten aufzufassen. Wenn die Relaxationszeiten  $\tau_{pv}$  ( $v = 1, \dots, m$ ) einander gleich sind, kann zweckmässig  $d_v = 1$  ( $v = 1, \dots, m$ ) gesetzt werden. Während der Ausdruck in den geschweiften Klammern von Gleichung (4.2) durch die Gleichgewichtsströmung festgelegt wird, ist das bei dem Koeffizienten  $\vartheta^{(1)}(x, y)$  nur dann der Fall, wenn alle  $\tau_{pv}$  und folglich auch alle  $d_v$  einander gleich sind. Die letzte Feststellung lässt sich später an Hand der Gleichungen (4.13) und (4.15) bis (4.17) bestätigen.

Bei Reihenerregung bleiben die Entwicklungen (4.1) und (4.2) formal gültig. Die Konstanten  $d_v$  hängen bei Reihenerregung mit den

Damköhlerzahlen und dem Störparameter  $\Delta$  folgendermassen zusammen:

$$2D_{R1}^{-1} = \Delta d_1, \quad 2D_{R1}^{-1} + D_{R2}^{-1} = \Delta d_2. \quad (4.8)$$

Im Falle  $\tau_{R1} = \tau_{R2}$  wählt man zweckmässig  $d_1 = 2$  und  $d_2 = 3$ .

Zur Berechnung des Koeffizienten  $\mathcal{G}^{(1)}(x, y)$  gehen wir mit den Entwicklungen (4.1) und (4.2) in den Energiesatz

$$\begin{aligned} F' \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} - \frac{Ec_e}{Re} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \\ - \frac{1}{Pr_e Re} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} = \sum_{v=1}^m K_{ev} \left\{ F' \frac{\partial (\mathcal{G} - \mathcal{G}_v)}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial (\mathcal{G} - \mathcal{G}_v)}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

mit  $K_{ev} = (K_{fv} c_{pf})/c_p$  ein. Bei Beschränkung auf Glieder der Grössenordnung eins bleibt die Differentialgleichung für  $\mathcal{G}_e$ :

$$F \mathcal{G}'_e + 2Ec_e F''^2 + \frac{2}{Pr_e} \mathcal{G}''_e = 0. \quad (4.10)$$

Für die gesuchte Funktion  $\mathcal{G}^{(1)}(x, y)$  findet man durch Koeffizientenvergleich die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} F' \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}}{\partial y} - \frac{1}{Pr_e Re} \frac{\partial^2 \mathcal{G}^{(1)}}{\partial y^2} \\ = \sum_{v=1}^m K_{ev} d_v \left\{ F' \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{F}{2x} \mathcal{G}'_e \right) \right. \\ \left. + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{F}{2x} \mathcal{G}'_e \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Der Ausdruck in den geschweiften Klammern auf der rechten Seite von Gleichung (4.11) lässt sich folgendermassen umformen:

$$\begin{aligned} F' \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{F}{2x} \mathcal{G}'_e \right] + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{F}{2x} \mathcal{G}'_e \right] \\ = \frac{F'}{2} \left[ \frac{F \mathcal{G}'_e}{x^2} + \frac{\eta}{2x^2} (F' \mathcal{G}'_e + \mathcal{G}''_e F) \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{\eta F' - F}{4x^2} [F' \mathcal{G}'_e + F \mathcal{G}''_e] \\ = \frac{1}{4x^2} [3F' F \mathcal{G}'_e + F^2 \mathcal{G}''_e]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Für die gesuchte Funktion  $\mathcal{G}^{(1)}(x, y)$  wird nun der Ansatz

$$\mathcal{G}^{(1)}(x, y) = x^{-1} \theta(\eta) \quad (4.13)$$

gemacht. Mit Benutzung dieses Ansatzes können wir die linke Seite von Gleichung (4.11) wesentlich einfacher darstellen:

$$\begin{aligned} F \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}}{\partial y} - \frac{1}{Pr_e Re} \frac{\partial^2 \mathcal{G}^{(1)}}{\partial y^2} \\ = \left[ F \theta' + \frac{2}{Pr_e} \theta'' \right] \left( -\frac{1}{2x^2} \right) - \frac{F' \theta}{x^2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Führt man die Beziehungen (4.12) und (4.14) in die partielle Differentialgleichung (4.11) ein, dann ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung für die unbekannte Funktion  $\theta(\eta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{4}{Pr_e} \theta'' + 2F \theta' + 4F' \theta + C_e (3F' F \mathcal{G}'_e + F^2 \mathcal{G}''_e) \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

mit der Kennzahl

$$C_e = \sum_{v=1}^m K_{ev} d_v. \quad (4.16)$$

Als Randbedingungen hat man

$$\theta = 0 \text{ für } \eta = 0 \text{ und } \eta = \infty. \quad (4.17)$$

Der Ansatz (4.13) und die Darstellungen (4.15) bis (4.17) gelten formal für Parallel- und Reihenerregung.

#### Ähnlichkeitsbeziehungen

Die vorangehenden Ausführungen zeigen, dass in erster Näherung gilt:

$$\frac{T - T_e}{T_w - T_\infty} \frac{x}{\Delta} = \theta(\eta, Pr_e, Ec_e, C_e), \quad (4.18)$$

$$\frac{T - T_v}{T_w - T_\infty} \frac{x}{d_v \Delta} = -\frac{F(\eta)}{2} \mathcal{G}'_e(\eta, Pr_e, Ec_e). \quad (4.19)$$



In erster Näherung besteht bei den Ausdrücken auf den linken Seiten von Gleichungen (4.18) und (4.19) innere Ähnlichkeit. In der angegebenen Form gelten die Ähnlichkeitsbeziehungen (4.18) und (4.19) für Parallel- und Reihenerregung. Der Mechanismus der Energieübertragung (Parallel- oder Reihenerregung) geht in  $d_v$  und  $C_e$  ein. Unter den Bedingungen

$$m = 2, \tau_{p1} = \tau_{p2}, \tau_{R1} = \tau_{R2}, K_{e1} = K_{e2} \quad (4.20)$$

gilt

$$(C_e)_{\text{Paralleleregung}} = 0,4(C_e)_{\text{Reihenerregung}} \quad (4.21)$$

#### Wärmeübergang an der Wand

Die örtliche Nusseltzahl ist folgendermassen definiert:

$$Nu_x = -x \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (4.22)$$

In erster Näherung gilt nach Gleichung (4.1):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \left[ g'_e(\eta, Pr_e, Ec_e) + \frac{4}{x} \theta'(\eta, Pr_e, Ec_e, C_e) \right] \sqrt{\left( \frac{Re}{x} \right)} \quad (4.23)$$

Ein Mass für den Einfluss des thermodynamischen Nichtgleichgewichtes auf den örtlichen Wärmeübergang an der Wand bildet die relative Abweichung  $(Nu_x - Nu_{xe})/Nu_{xe}$ . Für sie besteht die Ähnlichkeitsbeziehung

$$\frac{Nu_x - Nu_{xe}}{Nu_{xe}} \frac{x}{\Delta} = \frac{\theta'(0, Pr_e, Ec_e, C_e)}{g'_e(0, Pr_e, Ec_e)} \quad (4.24)$$

An der Plattenvorderkante versagen die Formeln (4.23) und (4.24), weil  $(\partial \vartheta / \partial y)_{y=0}$  als Funktion von  $x$  nach Gleichung (4.23) an der Plattenvorderkante eine nichtintegrierbare Singularität besitzt. Dieser Übelstand erklärt sich aus dem Versagen der Grenzschichtgleichungen an der Plattenvorderkante.

Aus den Formeln (4.3) bis (4.5) folgt

$$g'_e(0, Pr_e, Ec_e) = \left[ \frac{Ec_e g_{e2}(0, Pr_e)}{2} - 1 \right]$$

$$\times \frac{(F''(0))^{Pr_e}}{\int_0^\infty (F'''(\xi))^{Pr_e} d\xi} \quad (4.25)$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern von Gleichung (4.25) verschwindet für

$$Ec_e = Ec_e^* = \frac{2}{g_{e2}(0, Pr_e)} \quad (4.26)$$

Abbildung 2 enthält eine numerische Auswertung der Ähnlichkeitsbeziehung (4.24). Ein

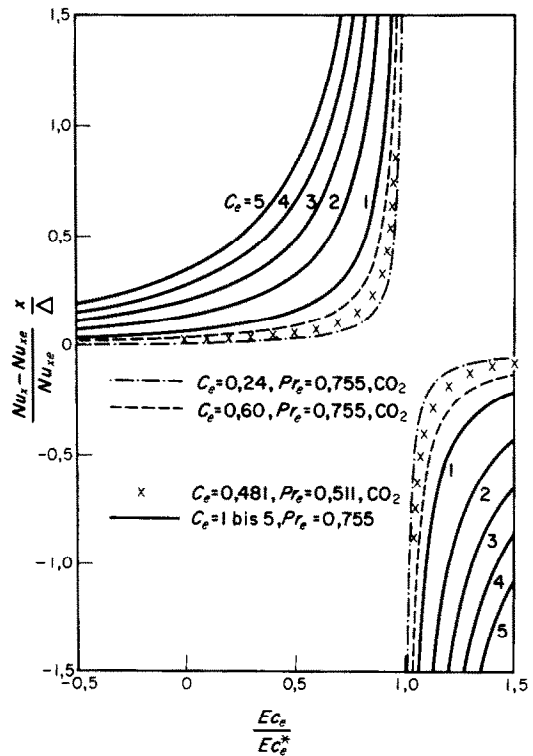


ABB. 2. Relative Abweichung der örtlichen Nusseltzahl an der Stelle  $x$  von dem zugehörigen Wert bei Gleichgewichtsströmung als Funktion der Eckertzahl  $Ec_e$  bei festen Werten für die Prandtlzahl  $Pr_e$ , die Kennzahl  $C_e$  und den Störparameter  $\Delta$ .

deutlicher Einfluss des thermodynamischen Nichtgleichgewichtes auf den Wärmeübergang an der Wand zeigt sich in einer Umgebung der kritischen Eckertzahl  $Ec_e^*$ . Die Singularität an der Stelle  $Ec_e = Ec_e^*$  erklärt sich einfach aus der

Tatsache, dass für  $Ec_e = Ec_e^*$  im Grenzfall der Gleichgewichtsströmung überhaupt kein Wärmeübergang an der Wand stattfindet.

Aus Gleichung (4.25) und  $F'''(\eta) > 0$  für  $\eta \geq 0$  schliesst man

$$Nu_{xe} > 0 \quad \text{für} \quad \frac{Ec_e}{Ec_e^*} < 1$$

$$\sqrt{xRe} > 0. \quad (4.27)$$

$$Nu_{xe} < 0 \quad \text{für} \quad \frac{Ec_e}{Ec_e^*} > 1$$

Die Kurven mit ganzzahligen  $C_e$ -Werten kann man sich (hypothetischen) polyatomaren Kühlmitteln zugeordnet denken, bei denen Reihenerregung mit durchweg gleichen Relaxationszeiten realisiert ist. Die nichtausgezogenen Kurven beziehen sich auf das Kühlmittel  $\text{CO}_2$ . In diesen Fällen wurden gleiche Relaxationszeiten angenommen. Bei Paralleleregung (Kurve  $C_e = 0,24$  und  $0,481$ ) wurde  $d_v = 1$ , bei Reihenerregung (Kurve  $C_e = 0,6$ )  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 3$  gesetzt. Den Berechnungen der Schwingungswärmen liegt das bekannte Modell des harmonischen Oszillators zugrunde. Die Prandtlzahlen ergeben sich mit Benutzung von Näherungsformeln für den Reibungskoeffizienten und die Wärmeleitfähigkeit ([2], Tabelle 1-B und 1-C). Tabelle 1 gibt Auskunft über die Temperaturen  $T$  zu den drei besprochenen Kurven und über die bei ihrer Berechnung berücksichtigten Schwingungsarten (vibrational modes). Die verschiedenen Schwingungsarten von  $\text{CO}_2$  findet man in Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 1. Erläuterung zu Abb. 2

Kurve	$T(^{\circ}\text{K})$	Berücksichtigte Schwingungsarten
— · — · —	350	$m = 2$ , nur Biegeschwingungen
· · · · ·	350	$m = 2$ , nur Biegeschwingungen
xxxxx	1200	$m = 4$ , alle Schwingungsarten

Die Auswirkung des thermodynamischen Nichtgleichgewichts auf den Wärmeübergang an der Wand hängt wesentlich von dem Mechanismus der Energieübertragung (Parallel-

Tabelle 2. Schwingungsarten von Kohlendioxyd.  $\theta_{v,v}$  ist die charakteristische Schwingungstemperatur der  $v$ -ten Schwingungsart

$v$	Schwingungsart	$\theta_{v,v}(^{\circ}\text{K})$
1, 2	$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{O} \quad \text{C} \\ \downarrow \end{array}$ Biegeschwingung	959
3	$\text{O} \rightarrow \text{C} \quad \leftarrow \text{O}$ symmetrisch	1920
4	$\leftarrow \text{O} \quad \text{C} \rightarrow \quad \leftarrow \text{O}$ asymmetrisch	3380

oder Reihenerregung) ab. Nach den Kurven in Abb. 2 zu urteilen, verbessert das thermodynamische Nichtgleichgewicht die Wandkühlung verglichen mit dem Grenzfall der Gleichgewichtsströmung, falls  $0 \leq Ec_e/Ec_e^* < 1$  gilt. Die Gültigkeit dieser Aussage, welche eine Eigenschaft der Ähnlichkeitslösung  $\theta(\eta, Pr_e, Ec_e, C_e)$  widerspiegelt, ist natürlich an die Voraussetzung geringer Abweichung vom ungehemmten thermodynamischen Gleichgewicht gebunden.

## 5. GERINGE ABWEICHUNGEN VON DER EINGEFRORENEN STRÖMUNG

Die Störungsrechnung zu dem vorliegenden Fall muss folgendem Sachverhalt Rechnung tragen: Nicht nur in der Anströmung, sondern auch unmittelbar an der Plattenwand herrscht ungehemmtes thermodynamisches Gleichgewicht. Letzteres lässt sich aus den Relaxationsgleichungen bei Beachtung der Haftbedingung an der Wand ablesen. Der Übergang von der nahezu eingefrorenen Aussenströmung zur Gleichgewichtsströmung unmittelbar an der Wand vollzieht sich in einer "Relaxationsgrenzschicht", in der grosse Schwingungstemperaturgradienten auftreten.

Die Temperaturfelder ausserhalb der Relaxationsgrenzschicht beschreiben wir durch asymptotische Entwicklungen zu dem "äusseren" Grenzübergang.

$$\delta \rightarrow 0, \quad x, y = \text{const.} \quad (5.1)$$

Innerhalb der Relaxationsgrenzschicht beschreiben wir die Temperaturfelder durch asymp-

totische Entwicklungen zu einem geeignet zu wählenden "inneren" Grenzübergang:

$$\delta \rightarrow 0, \quad x, Y = \text{const}, \quad Y = \frac{y}{G(\delta)},$$

$$0 < G(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{für } \delta \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

Die Festlegung der Funktion  $G(\delta)$  und damit die Streckung der Koordinate senkrecht zur Wand bleibt zunächst offen. Zwischen dem Störparameter  $\delta$  mit  $1 \gg \delta > 0$  und den Damköhlerzahlen besteht der Zusammenhang:

$$\delta b_v = D_v \ll 1, \quad v = 1, \dots, m \quad (\text{Parallelerregung}) \quad (5.3)$$

$$\delta b_{Rv} = D_{Rv} \ll 1, \quad v = 1, 2 \quad (\text{Reihenerregung})$$

Die  $b_v$  und  $b_{Rv}$  sind als Konstanten aufzufassen.

*Strömung aussèrhalb der Relaxationsgrenzschicht*

Wir gehen bei Parallelerregung aus von den Entwicklungen

$$\vartheta = \vartheta_f(\eta) + \delta \bar{\vartheta}(x, y) + o[\delta] \quad \text{für } \delta \rightarrow 0,$$

$$0 < y, x = \text{const}. \quad (5.4)$$

für  $\vartheta$  und

$$F' \frac{\partial \vartheta_v}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta_v}{\partial y} = \delta b_v \vartheta_f(\eta) + o[\delta]$$

für  $\delta \rightarrow 0, \quad 0 < y, x = \text{const} \quad (v = 1, \dots, m) \quad (5.5)$

für die Relaxationsgleichungen.

$$\vartheta_f(\eta) = \vartheta_e(\eta, Pr_f, Ec_f) \quad (5.6)$$

beschreibt  $(T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$  im Grenzfall der eingefrorenen Strömung.

Bei Reihenerregung bleibt Gleichung (5.4) formal bestehen. An die Stelle der Entwicklungen (5.5) tritt:

$$F' \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} = \delta b_{R1} \vartheta_f(\eta) + o[\delta]$$

für  $\delta \rightarrow 0, \quad 0 < y, x = \text{const}. \quad (5.7)$

$$F' \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} = o[\delta] \quad \text{für } \delta \rightarrow 0,$$

$$0 < y, x = \text{const}. \quad (5.8)$$

Die Entwicklungen (5.4) und (5.5) werden nun in den Energiesatz (3.5) eingeführt, dann bleibt bei Beschränkung auf Glieder der Ordnung eins die Differentialgleichung für  $\vartheta_f$ :

$$F \vartheta_f' + 2Ec_f F''^2 + \frac{2}{Pr_f} \vartheta_f'' = 0. \quad (5.9)$$

Für die Funktion  $\bar{\vartheta}(x, y)$  findet man durch Koeffizientenvergleich

$$F' \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} + \frac{\eta F' - F}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} + \vartheta_f \sum_{v=1}^m K_{fv} b_v = \frac{1}{Pr_f Re} \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial y^2}. \quad (5.10)$$

Mit dem Ansatz

$$\bar{\vartheta} = x \bar{\theta}(\eta) \quad (5.11)$$

geht die Differentialgleichung (5.10) über in eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $\bar{\theta}$ :

$$F' \bar{\theta} - \frac{F}{2} \bar{\theta}' - \frac{1}{Pr_f} \bar{\theta}'' + C_f \vartheta_f = 0 \quad (5.12)$$

mit

$$C_f = \sum_{v=1}^m K_{fv} b_v. \quad (5.13)$$

Als Randbedingungen hat man

$$\bar{\theta} = 0 \quad \text{für } \eta = 0 \text{ und } \eta = \infty. \quad (5.14)$$

Die Randbedingung für  $\bar{\theta}$  an der Wand rechtfertigt sich im nachfolgenden Abschnitt über die Strömung innerhalb der Relaxationsgrenzschicht.

Bei Reihenerregung bleiben der Ansatz (5.11) und die Aussagen (5.12) bis (5.14) formal gültig, wenn  $m = 1$  und  $b_{R1}$  statt  $b_1$  gesetzt wird.

Zur Berechnung von  $\vartheta_v (v = 1, \dots, m)$  führen wir den Ansatz

$$\vartheta_v = \delta x \theta_v(\eta) + o[\delta] \quad \text{für } \delta \rightarrow 0,$$

$$0 < y, x = \text{const} \quad (v = 1, \dots, m) \quad (5.15)$$

in die Entwicklungen (5.5) bzw. (5.7), (5.8) ein. Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich gewöhnliche Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen  $\theta_v$ :

Parallelerregung:

$$F''\theta_v - \frac{F}{2}\theta'_v - b_v\vartheta_f = 0 \quad (v = 1, \dots, m). \quad (5.16)$$

Reihenerregung:

$$F'\theta_1 - \frac{F}{2}\theta_1 - b_{R1}\vartheta_f = 0. \quad (5.17)$$

Die äusseren Entwicklungen (5.15) müssen der Randbedingung im Unendlichen genügen:

$$\theta_v = 0 \quad \text{für } \eta = \infty \quad (v = 1, \dots, m). \quad (5.18)$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten findet man für die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (5.16) die Darstellung

$$\theta_v = F^2(\eta) \left( A + 2b_v \int_{\eta}^{\infty} \frac{\vartheta_f(\xi)}{F^3(\xi)} d\xi \right),$$

$$\eta > 0 \quad (v = 1, \dots, m). \quad (5.19)$$

Die Randbedingung (5.18) bestimmt die willkürliche Konstante A:

$$A = 0. \quad (5.20)$$

Bei Reihenerregung verschwindet  $\theta_2$  identisch in  $\eta$ . Die Lösung  $\theta_1(\eta)$  liefert Formel (5.19) mit  $A = 0$  und  $b_{R1}$  statt  $b_v$ .

*Strömung innerhalb der Relaxationsgrenzschicht*

Die Funktionen  $\theta_v(\eta)$  verhalten sich—abgesehen von  $\theta_2$  bei Reihenerregung—singulär an der Stelle  $\eta = 0$ . Diesen Übelstand verschuldet die Verstümmelung der rechten Seiten der Relaxationsgleichungen durch die äussere Entwicklung. Man sieht sofort, die durch Vernachlässigung der Restglieder  $o[\delta]$  genäherten Relaxationsgleichungen (5.5) und (5.7 versagen unmittelbar an der Wand; sie liefern dort nämlich von null verschiedene substantielle Ableitungen der Schwingungstemperaturen.

Der innere Grenzübergang ist so vorzunehmen, dass dabei die Relaxationsgleichungen zu Aussagen werden, welche sich mit dem ungehemmten thermodynamischen Gleichgewicht

unmittelbar an der Wand vertragen und welche verglichen mit den Ausgangsgleichungen möglichst wenig entartet sind. Diesen Ansprüchen genügt die Wahl

$$G(\delta) = \delta, \quad (5.21)$$

wie wir anschliessend sehen werden.

Die Relaxationsgleichungen (3.6) bis (3.8) lassen sich leicht auf innere Koordinaten  $x, Y$  umrechnen. Mit Benutzung der Definitionen

$$Z = \frac{\eta}{G(\delta)}, \quad Y = \frac{y}{G(\delta)}, \quad f(Z) = F(G(\delta)Z)G^{-2}(\delta),$$

$$f'(Z) = \frac{df(Z)}{dZ} \quad (5.22)$$

kommt heraus:

Parallelerregung:

$$\frac{G(\delta)}{\delta} f' \frac{\partial \vartheta_v}{\partial x} + \frac{G(\delta)(Zf' - f)}{2\delta\sqrt{(x Re)}} \frac{\partial \vartheta_v}{\partial Y}$$

$$= b_v(\vartheta - \vartheta_v) \quad (v = 1, \dots, m). \quad (5.23)$$

Reihenerregung:

$$\frac{G(\delta)}{\delta} f' \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + \frac{G(\delta)(Zf' - f)}{2\delta\sqrt{(x Re)}} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial Y}$$

$$= b_{R1}(\vartheta - \vartheta_1) + b_{R2}(\vartheta_2 - \vartheta_1). \quad (5.24)$$

$$\frac{G(\delta)}{\delta} f' \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} + \frac{G(\delta)(Zf' - f)}{2\delta\sqrt{(x Re)}} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial Y}$$

$$= b_{R2}(\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (5.25)$$

Den Zähler des Koeffizienten von  $\partial \vartheta_v / \partial Y$  können wir mit Benutzung der Randbedingungen (3.4), der Differentialgleichung (3.3) und  $F''(0) \neq 0$  in eine Potenzreihe um  $\eta = 0$  entwickeln:

$$G^2(\delta) (Zf' - f) = \eta F'(\eta) - F(\eta)$$

$$= \frac{F'''(0)}{2} (G(\delta)Z)^2 + o[(G(\delta)Z)^5]. \quad (5.26)$$

Man bestätigt leicht:

$$G(\delta)f' = F'''(0)G(\delta)Z + o[(G(\delta)Z)^4]. \quad (5.27)$$

Die Gleichungen (5.22) bis (5.27) lassen erkennen: Führt man bei den Relaxationsgleichungen den inneren Grenzübergang durch, dann bleibt bei Parallelerregung ein Glied sowohl mit  $\partial \vartheta_v / \partial x$  als auch mit  $\partial \vartheta_v / \partial Y$  und mit  $\vartheta - \vartheta_v$  nur

dann bestehen, wenn  $G(\delta)$  wie  $\delta$  verschwindet für  $\delta \rightarrow 0$ . Entsprechendes gilt bei Reihenerregung. Die Ergebnisse des inneren Grenzüberganges mit  $G(\delta) = \delta$  lauten bei den Relaxationsgleichungen:

Parallelenerregung:

$$F'''(0) Z \frac{\partial \vartheta_v}{\partial x} + \frac{F'''(0) Z^2}{4\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta_v}{\partial Y} = b(\vartheta_v - \vartheta_v)(v = 1, \dots, m). \quad (5.28)$$

Reihenerregung:

$$F'''(0) Z \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + \frac{F'''(0) Z^2}{4\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial Y} = b_{R1}(\vartheta - \vartheta_1) + b_{R2}(\vartheta_2 - \vartheta_1), \quad (5.29)$$

$$F'''(0) Z \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} + \frac{F'''(0) Z^2}{4\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial Y} = b_{R2}(\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (5.30)$$

Offenbar vertragen sich die Näherungen (5.28) bis (5.30) für die Relaxationsgleichungen innerhalb der Relaxationsgrenzschicht mit der Forderung des ungehemmten thermodynamischen Gleichgewichts unmittelbar an der Wand. Eine Lösung der Differentialgleichungssysteme (5.28) und (5.29), (5.30), welche die Randbedingungen für  $\vartheta$  und  $\vartheta_v$  an der Wand erfüllt, lässt sich sofort angeben:

$$\vartheta_v = \vartheta = 1. \quad (5.31)$$

Aus dem Energiesatz

$$G(\delta) f' \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{(Zf' - f)G(\delta)}{2\sqrt{(xRe)}} \frac{\partial \vartheta}{\partial Y} + \delta \Sigma = \frac{1}{Pr_f Re} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Y^2} \frac{1}{G^2(\delta)} + \frac{Ec_f}{Re} \left( \frac{\partial f'}{\partial Y} \right)^2 \quad (5.32)$$

mit

$$\Sigma = \sum_{v=1}^m K_{fv} b_v (\vartheta - \vartheta_v) \text{ bei Parallelenerregung,}$$

$$\Sigma = K_{f1}(b_{R1}[\vartheta - \vartheta_1] + b_{R2}[\vartheta_2 - \vartheta_1]) + K_{f2} b_{R2}[\vartheta_1 - \vartheta_2] \text{ bei Reihenerregung} \quad (5.33)$$

findet man mit Hilfe der Entwicklungen (5.26) und (5.27):

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Y^2} \frac{1}{G^2(\delta)} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0[1]$$

innerhalb der Relaxationsgrenzschicht. (5.34)

$\partial \vartheta / \partial y$  und  $\vartheta$  besitzen offenbar das gleiche asymptotische Verhalten. Wir erkennen:

Für die Temperatur der aktiven Freiheitsgrade gibt es keine Relaxationsgrenzschicht. Die äussere Entwicklung (5.4) gilt auch innerhalb der Relaxationsgrenzschicht.

*Wärmeübergang an der Wand*

Ein Mass für die Abweichung des örtlichen Wärmeüberganges an der Wand von dem zugehörigen Wert in eingefrorener Strömung bildet die relative Abweichung  $(Nu_x - Nu_{xf}) / Nu_{xf} \cdot Nu_{xf}$  bezeichnet die örtliche Nusseltzahl in eingefrorener Strömung. Die Formeln (4.22), (5.4), (5.6) und (5.11) führen zu der Ähnlichkeitsbeziehung

$$\frac{Nu_x - Nu_{xf}}{Nu_{xf}} \frac{1}{\delta x} = \frac{\bar{\theta}'(0, Pr_f, Ec_f, C_f)}{\vartheta'_e(0, Pr_f, Ec_f)}. \quad (5.35)$$

Sie gilt wie Gleichung (4.24) für Parallel- und Reihenerregung. Der Mechanismus der Energieübertragung (Parallel- oder Reihenerregung) geht in die Kennzahl  $C_f$  ein:

$$C_f = \begin{cases} \sum_{v=1}^m K_{fv} b_v & \text{(Parallelenerregung)} \\ K_{f1} b_{R1} & \text{(Reihenerregung)} \end{cases} \quad (5.36)$$

Die Aussage (5.35) ist an die Voraussetzung geringer Abweichung von der eingefrorenen Strömung gebunden.

Wir können aber mittels Gleichungen (4.3) bis (4.5) leicht das Verhältnis  $Nu_{xe} / Nu_{xf}$  finden:

$$\frac{Nu_{xe}}{Nu_{xf}} = \frac{\vartheta'_e(0, Pr_e, Ec_e)}{\vartheta'_e(0, Pr_f, Ec_f)} = \frac{\left(1 - \frac{Ec_e}{2} \vartheta_{e2}(0, Pr_e)\right) \vartheta'_{e1}(0, Pr_e)}{\left(1 - \frac{Ec_f}{2} \vartheta_{e2}(0, Pr_f)\right) \vartheta'_{e1}(0, Pr_f)}. \quad (5.37)$$

Für Prandtlzahlen nahe eins gilt in guter

Näherung ([4], Gleichungen (12,71a) und (12,75))

$$\vartheta'_{e1}(0, Pr_e) = -0,332(\sqrt[3]{Pr_e}),$$

$$\vartheta_{e2}(0, Pr_e) = (\sqrt{Pr_e}). \quad (5.38)$$

Diese Näherungen gestatten, das Ergebnis (5.37) für Prandtlzahlen nahe eins wesentlich einfacher zu schreiben:

$$\frac{Nu_{xe}}{Nu_{xf}} = \frac{1 - \frac{Ec_e}{Ec_e^*}}{1 - \frac{Ec_e}{Ec_e^*} \sqrt{\left(\frac{c_p}{c_{pf}}\right)}} \sqrt[3]{\left(\frac{c_p}{c_{pf}}\right)},$$

$$Ec_e^* = \frac{2}{\sqrt{Pr_e}}. \quad (5.39)$$

Nach Formel (5.39), Gleichung (4.25) und den Ungleichungen (4.27) sind folgende Fälle zu unterscheiden:

$\frac{Ec_e}{Ec_e^*} < 0$ , Wandaufheizung bei Gleichgewichts- und eingefrorener Strömung

$0 \leq \frac{Ec_e}{Ec_e^*} < \sqrt{\left(\frac{c_{pf}}{c_p}\right)}$ , Wandkühlung bei Gleichgewichts- und eingefrorener Strömung

$$\frac{Ec_e}{Ec_e^*} = \sqrt{\left(\frac{c_{pf}}{c_p}\right)},$$

$$\sqrt{\left(\frac{c_{pf}}{c_p}\right)} < \frac{Ec_e}{Ec_e^*} < 1,$$

$\frac{Ec_e}{Ec_e^*} = 1$ , kein Wärmeübergang bei Gleichgewichtsströmung, Wandaufheizung bei eingefrorener Strömung

$\frac{Ec_e}{Ec_e^*} > 1$ , Wandaufheizung bei Gleichgewichts- und eingefrorener Strömung

Wandkühlung bei Gleichgewichtsströmung, kein Wärmeübergang bei eingefrorener Strömung

Wandkühlung bei Gleichgewichtsströmung, Wandaufheizung bei eingefrorener Strömung

In Abb. 3 findet man  $Nu_{xe}/Nu_{xf}$  über  $Ec_e/Ec_e^*$  aufgetragen nach Formel (5.39). Der Wert  $c_p/c_{pf} = 15/7$  gilt für das Kühlmittel Kohlendioxyd, wenn alle vier Schwingungsarten voll erregt sind. Wir entnehmen dem Kurvenverlauf, dass der Wärmeübergang bei Gleichgewichtsströmung und eingefrorener Strömung für ein bestimmtes negatives Verhältnis  $Ec_e/Ec_e^*$  derselbe ist.

Formel (5.39) deutet darauf hin, dass thermo-

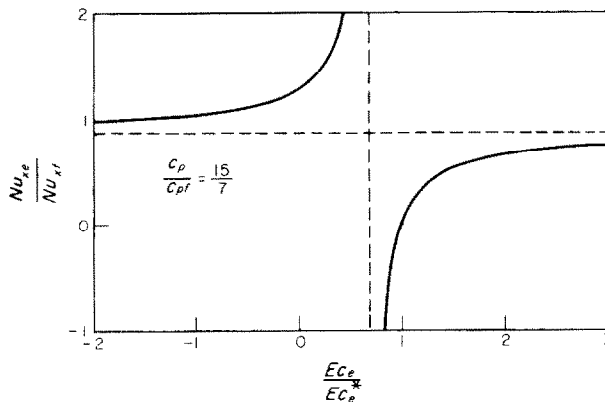


ABB. 3. Verhältnis der örtlichen Nusseltzahlen an der Stelle  $x$  bei Gleichgewichtsströmung und eingefrorener Strömung als Funktion der Eckertzahl  $Ec_e$  dividiert durch die kritische Eckertzahl  $Ec_e^*$ . Das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck bei Gleichgewichtsströmung und eingefrorener Strömung beträgt  $15/7$ . Die gestrichelten Linien stellen die Asymptoten  $Nu_{xe}/Nu_{xf} = (c_p/c_{pf})^{-1/3}$  bzw.  $Ec_e/Ec_e^* = (c_{pf}/c_p)^{1/3}$  dar.

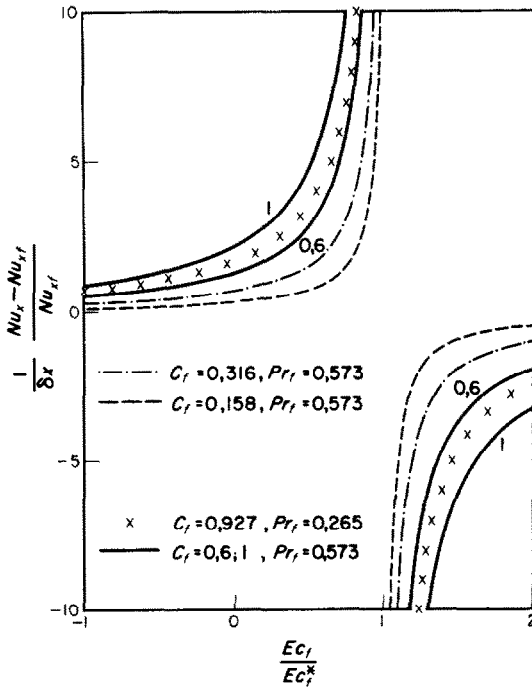


ABB. 4. Relative Abweichung der örtlichen Nusseltzahl an der Stelle  $x$  von dem zugehörigen Wert bei eingefrorener Strömung als Funktion der Eckertzahl  $Ec_f$  bei festen Werten für die Prandtlzahl  $Pr_f$ , die Kennzahl  $C_f$  und den Störparameter  $\delta$ .

dynamisches Nichtgleichgewicht den Wärmeübergang bei polyatomaren Gasen ( $c_p/c_{pf} \gg 1$ ) stark beeinflussen kann.

Abbildung 4 enthält eine numerische Auswertung der Ähnlichkeitsbeziehung (5.35). Die nichtausgezogenen Kurven beziehen sich wie in Abb. 2 auf das Kühlmittel Kohlendioxyd. In diesen Fällen wurden gleiche Relaxationszeiten angenommen und  $b_v = 1$  ( $v = 1, \dots, m$ ),  $b_{R1} = 1$  gesetzt. Der Berechnung der Schwingungswärmen  $c_v$  in den Kennzahlen  $K_{fv}$  liegt das bekannte Modell des harmonischen Oszillators zugrunde. Die Prandtlzahlen  $Pr_f$  in Abb. 4 hängen mit den zugehörigen Prandtlzahlen  $Pr_e$  in Abb. 2 folgendermassen zusammen:

$$Pr_f = Pr_e \frac{c_{pf}}{c_p},$$

$$\frac{c_p}{c_{pf}} = 1 + \frac{2}{7} \sum_{v=1}^m \left( \frac{\theta_{vv}}{2T} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 \left( \frac{\theta_{vv}}{2T} \right)}. \quad (5.40)$$

Die Werte für  $m$  und  $T$  sowie die charakteristischen Schwingungstemperaturen  $\theta_{vv}$  sind den Tabellen 1 bzw. 2 zu entnehmen, welche auch für Abb. 4 gelten. Die Singularität an der Stelle

$$Ec_f = Ec_f^* = \frac{2}{g_{e2}(0, Pr_f)} \quad (5.41)$$

erklärt sich einfach daraus, dass für  $Ec_f = Ec_f^*$  bei eingefrorener Strömung überhaupt kein Wärmeübergang stattfindet. An die Stelle der Aussage (4.27) tritt bei eingefrorener Strömung

$$Nu_{xf} > 0 \text{ für } \frac{Ec_f}{Ec_f^*} < 1, \quad \sqrt{(xRe)} > 0. \quad (5.42)$$

$$Nu_{xf} < 0 \text{ für } \frac{Ec_f}{Ec_f^*} > 1$$

Nach den Kurven in Abb. 4 zu urteilen, verbessert sich die Wandkühlung bei Abweichung von der eingefrorenen Strömung, falls  $0 \leq Ec_f/Ec_f^* < 1$  gilt.

#### LITERATUR

1. K. F. HERZFELD, Relaxation phenomena in gases. *Thermodynamics and Physics of Matter*, Bd. 1 von High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, 1. Aufl. Princeton University Press, Princeton (1955). (Herausgeber: F. D. ROSSINI).
2. J. HILSEN RATH et al. *Tables of Thermal Properties of Gases*. National Bureau of Standards Circular 564 (1955).
3. G. ROMBERG, Gasströmungen mit thermodynamischer Relaxation. *Übersichtsbeiträge zur Gasdynamik*. 1. Aufl. Springer, Wien (1971). (Herausgeber: E. LEITER und J. ZIEREP).
4. H. SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie*. 5. Aufl. Braun, Karlsruhe (1965).

#### THE COOLING PROBLEM IN LAMINAR BOUNDARY LAYERS OF REAL GASES

**Abstract**—The laminar boundary layer on a flat plate is investigated at a fixed wall temperature, the oncoming stream being subsonic and in thermodynamic equilibrium. The fluid is a mixture of thermally

perfect gases exhibiting vibrational relaxation processes. Two mechanisms of energy transfer are investigated: excitation in parallel and excitation in series. Similarity solutions describe the boundary-layer flow in the near frozen and near equilibrium case, if the difference between the wall temperature and the temperature of the oncoming stream is sufficiently small. Vibrational nonequilibrium can exert an important influence on the local heat transfer at the wall in a certain range of Eckert numbers. Strong influence of vibrational nonequilibrium on the local heat transfer at the wall can occur with polyatomic coolants.

#### LE PROBLEME DU REFROIDISSEMENT DES GAZ REELS EN COUCHE LIMITE LAMINAIRE

**Résumé**— On considère la couche limite laminaire sur plaque plane à température pariétale fixée, l'écoulement incident étant subsonique et en équilibre thermodynamique. Le fluide est un mélange de gaz parfaits avec relaxation vibrationnelle. On étudie deux mécanismes de transfert d'énergie: excitation en parallèle et excitation en série. Des solutions de similitude décrivent la couche limite au voisinage du cas gelé et du cas d'équilibre si la différence entre température de paroi et température de l'écoulement incident est suffisamment petit. Le déséquilibre vibrationnel peut exercer une influence importante sur le transfert thermique local à la paroi dans un certain domaine du nombre de Eckert. Le déséquilibre vibrationnel exerce une forte influence sur le transfert thermique local pariétal avec les réfrigérants polyatomiques.

#### ПРОБЛЕМА ОХЛАЖДЕНИЯ В ЛАМИНАРНЫХ ПОГРАНИУНЫХ СЛОЯХ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

**Аннотация**—Исследуется ламинарный пограничный слой на плоской пластине при определённой температуре стенки, когда набегающий поток является дозвуковым и находится в термодинамическом равновесии. Жидкость представляет собой смесь термически идеальных газов, в которой происходят вибрационные процессы релаксации. Исследуются два механизма переноса энергии: параллельное и последовательное возбуждение. Течение в пограничном слое в квазизамороженном и в квазиравновесном случае описывается подобными решениями, если разность между температурой стенки и температурой набегающего потока достаточно мала. Вибрационное неравновесие может оказывать значительное влияние на локальный перенос тепла на стенке при использовании полиатомных охладителей.